

LIBRIS

We know
books

**MINISTERUL EDUCAȚIEI
ȘI CERCETĂRII**

**Radu Gologan
Elisabeta Ana Naghi
Camelia Elena Neța
Ciprian Constantin Neța**

Matematică

CORINT
LOGISTIC



Competențe generale și competențe specifice	4
Cuvânt-înainte	5
Ghid de utilizare a manualului	6

RECAPITULARE ÎNȚĂLĂ

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

• Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	12
• Intervale numerice. Reprezentare pe axa numerelor	15
• Operații cu intervale numerice: intersecția și reuniunea	21
• Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	24
Recapitulare	31
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	33

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

• Operații cu numere reale reprezentate prin litere	36
• Formule de calcul prescurtat	40
• Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$	43
Recapitulare	47
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	48
• Frații algebrice. Operații cu fracții algebrice	50
• Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice	53
• Înmulțirea și împărțirea fracțiilor algebrice	54
• Ridicarea la putere	54
• Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	58
Recapitulare	62
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	63

FUNCȚII

• Funcții definite pe mulțimi finite	66
• Graficul unei funcții	68
• Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $D \subset \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$	73
• Elemente de statistică. Indicatorii tendinței centrale	
• Frecvența	83
• Media caracteristicii	85
• Mediana caracteristicii cantitative	86
• Modul sau dominantă caracteristicii	87
• Amplitudinea caracteristicii cantitative	87
Recapitulare	92
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	93

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

• Puncte, drepte, plane	96
• Axiome despre puncte/drepte/plan	97
• Determinările planului	99
• Convenții de reprezentare a figurilor în spațiu	100
• Corpuri geometrice	104
• Piramida	105
• Prisma	111
• Cilindru circular drept. Con circular drept	118
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	120
• Paralelism	
• Drepte paralele. Unghiul a două drepte	122
• Dreaptă paralelă cu un plan. Plane paralele	126
• Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate	133
• Secțiuni în prismă/cilindru	133
• Secțiuni în piramidă/con	134
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	138
• Perpendicularitate	
• Dreaptă perpendiculară pe un plan	140
• Aplicații	143
• Plane perpendiculare. Aplicații	148
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	151
• Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan	152
• Unghiul dintre o dreaptă și un plan	155
• Unghi diedru, unghi plan corespunzător unghiului diedru. Unghiul a două plane	158
• Teorema celor trei perpendiculare	162
Recapitulare	166
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	167

ARI ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

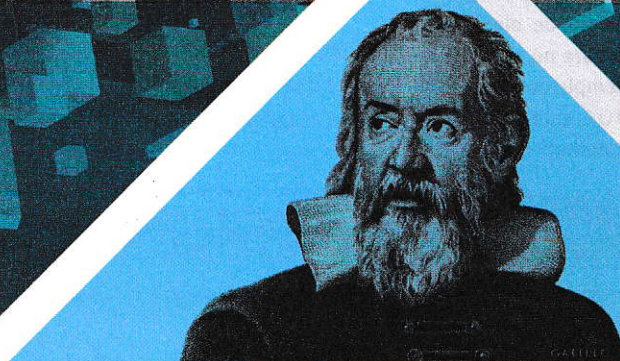
• Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate	170
• Arie și volume ale unor corpuri geometrice	
• Aria și volumul cubului, ale paralelipipedului dreptunghic și ale prisme drepte	175
• Aria și volumul piramidei și ale trunchiului de piramidă regulată	181
• Aria și volumul cilindrului circular drept, ale conului circular drept și ale trunchiului de con circular drept	188
• Aria și volumul sferei	194
Recapitulare	196
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	197
RECAPITULARE DINTR-O PRIVIRE	199
RECAPITULARE FINALĂ	203
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	207

LIBRIS

We know
books

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

*Matematica este limba
cu care Dumnezeu
a scris universul.*



„Natura este scrisă în limbaj matematic.”

Galileo Galilei (1564–1642)

LIBRĂRI

We know books

Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor



Activitate în cooperare

În grupe de câte 4 elevi, parcurgeți următoarele cerințe:

– Individual, scrieți prin enumerare mulțimea $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 18 : x\}$ și mulțimea $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \mid 12\}$

– Comparați mulțimile obținute și analizați ce factori ar conduce la rezultate diferite în cadrul grupeii.

– Colaborați pentru a ajunge la aceleași elemente pentru mulțimile cerute, apoi determinați cardinalele mulțimilor, reuniunea, intersecția și diferențele dintre mulțimile date.

– Dați exemplu de câte un element care aparține mulțimilor $D, E, D \cup E, E \cup D, D \cap E, E \cap D, D - E$ și $E - D$.

– Dați câte un exemplu de număr care nu aparține mulțimilor $D, E, D \cup E, E \cup D, D \cap E, E \cap D, D - E, E - D$.

– Se poate da exemplu de un element care aparține mulțimii D , care nu aparține mulțimii $D \cup E$? Dar un exemplu de element care aparține mulțimii D , care nu aparține mulțimii $D \cap E$? Dar un exemplu de element care aparține mulțimii $D \cup E$, care nu aparține mulțimii $D \cap E$? Argumentați.



Ne amintim!

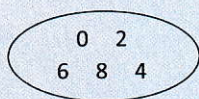
■ **Mulțimea** este o colecție (grup, ansamblu, grămadă) de mai multe obiecte care au o proprietate comună. Aceste obiecte se numesc **elementele mulțimii** și se scriu între acolade. Elementele oricărei mulțimi sunt distincte.

■ Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțime vidă** și se notează $\emptyset$.

■ Mulțimile se notează cu numere mari: $A, B, C, D, \dots$, iar elementele mulțimilor se notează, de regulă, cu litere mici.

■ O mulțime poate fi reprezentată în trei moduri.

De exemplu, dacă A este mulțimea cifrelor pare, A poate fi reprezentată:

prin enumerarea elementelor sale	prin o proprietate caracteristică comună tuturor elementelor mulțimii	prin diagrama Venn-Euler
$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$	$A = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$	A 
Fiecare cifră apare o singură dată în mulțime.	Citim: mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este cifră pară.	Elementele mulțimii se scriu într-un cerc/oval.

■ Fie mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 9\}$, $D = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 < n < 11\}$.

– Dacă un element x aparține unei mulțimi A , se notează $x \in A$ și se citește „ x aparține lui A ”.

Dacă un element y nu se găsește în mulțimea B , se scrie $y \notin B$ și se citește „ y nu aparține lui B ”.

$2 \in A, 2 \in B; 0 \in A, 0 \notin B, 0 \in C;$
 $10 \notin A, 10 \in B, 10 \notin C.$

– **Cardinalul unei mulțimi** A , notat $\text{card } A$ sau $|A|$, este numărul de elemente al mulțimii A .

Mulțimile cu un număr finit de elemente se numesc **mulțimi finite**. Acestor mulțimi le putem număra elementele, deci putem spune care este cardinalul lor.

$\text{card } A = 10$ (prin numărare);
 $\text{card } B = 5$; $\text{card } C = 10$ (există 10 numere naturale mai mici sau egale cu 9).

Determinați $\text{card } D$.

Mulțimile cu număr infinit de elemente se numesc **mulțimi infinite**. Acestor mulțimi nu le putem asocia niciun număr real care să reprezinte cardinalul, dar putem spune că sunt de cardinal infinit.

– Două mulțimi sunt **egale** dacă sunt formate din aceleași elemente. Se notează $A = B$.

Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu aparține mulțimii B sau invers, se spune că mulțimile A și B sunt diferite. Se notează $A \neq B$.

– **Reuniunea** a două mulțimi este o mulțime formată din toate elementele celor două mulțimi, fiecare element comun fiind luat o singură dată. Notăm $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

– **Intersecția** a două mulțimi este o mulțime formată din elementele comune ale celor două mulțimi. Notăm $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

– **Diferența** a două mulțimi este o mulțime formată din elementele care aparțin primei mulțimi, dar nu aparțin mulțimii a doua.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

– O mulțime A este **inclusă** într-o mulțime B dacă orice element al mulțimii A aparține și mulțimii B și se notează $A \subset B$. Putem spune și că mulțimea B **include** mulțimea A și notăm $B \supset A$. Mulțimea A se numește **submulțime** a mulțimii B .

Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este și element al mulțimii B , se spune că mulțimea A **nu este inclusă** în mulțimea B și se folosește notația $A \not\subset B$.

$A = C$ (utilizând pentru mulțimea C scrierea prin enumerare, obținem aceleași elemente ca cele din A); $A \neq B$.

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \text{ card}(A \cup B) = 11.$$

Determinați $A \cup D$ și $D \cup B$.

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Determinați $A \cap D$ și $B \cap D$.

$$A \setminus B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}; B \setminus A = \{10\}; A \setminus C = \emptyset.$$

Determinați $D \setminus B$.

$B \subset D$, deci B este submulțime a lui D ; putem spune că $A \subset C$ și $C \subset A$; $B \not\subset A$ (B conține pe 10, care nu este în A).

Diagrama Venn-Euler se folosește, în general, la reprezentarea mulțimilor finite. Mulțimile infinite se pot reprezenta prin enumerarea unor elemente și sugerarea faptului că enumerarea poate continua la infinit, dar cel mai bine este să se găsească o proprietate caracteristică a elementelor.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ – mulțimea numerelor naturale nenule

$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ – mulțimea numerelor raționale

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale (un număr irațional este o fracție zecimală infinită neperiodică)

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor iraționale

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Exersăm împreună!

1. Rescrieți în limbaj simbolic mulțimea M formată din elementele n cu proprietatea că sunt numere naturale pare.

2. Rescrieți ca text $S = \{p \in \mathbb{N} \mid p + 1 \leq 10\}$. Scrieți submulțimea P a lui S ce conține ca elemente numai numere pare.

3. Rescrieți mulțimile următoare prin enumerarea elementelor:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k^2 + k - 5, k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7 - k, k \in \mathbb{N}\}$,
 $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n + 1, n = 1, 2, 3, 4\}$.

Rezolvare.

$$1. M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}.$$

2. S este mulțimea numerelor naturale p cu proprietatea $p + 1 \leq 10$.
 $P = \{p \in \mathbb{N} \mid p + 1 \leq 10 \text{ și } p \text{ număr par}\}.$

$$3. A = \{9; 25; 47\}, B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}, C = \{4; 7; 10; 13\}.$$



Reflectăm!

Ne-am amintit că o mulțime poate fi scrisă sau definită prin enumerarea elementelor, prin reprezentarea cu ajutorul diagramei și am învățat că poate fi definită și cu ajutorul precizării unor proprietăți ale elementelor sale.

Argumentați care dintre mulțimile alăturate se poate scrie prin enumerare sau prin diagrame. Formulați opinii privind avantajele sau limitele utilizării uneia sau alteia dintre modalitățile de scriere a mulțimilor.

1. Se consideră mulțimea $A = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$ și mulțimea $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 8 : x\}$.

a) Precizați valoarea de adevăr a afirmațiilor:

i) $-3 \in A$; ii) $-3 \in B$; iii) $-3 \in A \cup B$; iv) $-3 \in A \cap B$; v) $-3 \in A - B$; vi) $-3 \in B - A$.

b) Scrieți prin enumerare mulțimea B , apoi, cu ajutorul diagramelor, evidențiați zona corespunzătoare intersecției celor două mulțimi.

c) Scrieți mulțimea A evidențiind o proprietate comună a tuturor elementelor sale. Comparați răspunsurile între voi.

2. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ par și } \sqrt{x^2} \leq 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4 \text{ sau } |x| = 4\}$.

a) Fără a rescrie mulțimile date prin enumerarea elementelor, precizați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, explicând cum ați raționat: i) $6 \in A$; ii) $6 \in B$; iii) $0 \in A$; iv) $0 \in B$.

b) Rescrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile A și B . Determinați apoi $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$. Reprezentați cu ajutorul diagramelor cele două mulțimi și asociați zonele din diagrame cu mulțimile obținute prin reuniune, intersecție și diferență.

c) Se consideră mulțimile $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ par}\}$ și $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} \leq 4\}$. Identificați ce operație cu mulțimi stabilește o relație între mulțimile A , C și D .

3. Rescrieți mulțimile prin enumerarea elementelor: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 24\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \mid 6\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \mid x \text{ și } x < 45\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^{k+1}, 0 \leq k \leq 3\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{16}{3x+1} \in \mathbb{N}\}$; $F = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{2x+1}{13} \text{ fracție subunitară}\}$.

4. Determinați mulțimile și cardinalul lor: $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$, $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 2a, a \in A\}$, $C = \{c \in \mathbb{N} \mid c = 2b - 1, b \in B\}$.

5. Rescrieți mulțimile $A = \{0; 3; 6; 9\}$ și $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ folosind o proprietate a elementelor și determinați reuniunea, intersecția și diferența lor.

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10, x \text{ este pătratul unui număr întreg}\} = \{0; 1; 4; 9\}$;

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\} \subset \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ se divide cu } 5\} \subset \{1; 5\}$.

7. Scrieți mulțimea divizorilor naturali ai numărului 48, mulțimea divizorilor întregi ai numărului 12 și mulțimea multiplilor naturali ai numărului 8 mai mici decât 100.

8. Determinați mulțimile X și Y , știind că $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X \cap Y = \{4, 5, 7\}$ și $Y \setminus X = \{0, 8\}$.

9. Dintr-o clasă cu 30 de elevi, 18 participă la olimpiada de matematică și 16 la olimpiada de biologie. Determinați câți elevi participă la ambele concursuri, știind că toți elevii participă la cel puțin una dintre cele două olimpiade.

10. Fie mulțimea: $A = \{-3; -2, 14; -\sqrt{2}; -1, (32); 0; 2, (3); \sqrt{6}; \pi; 5; 6, 15\}$. Alegeți din mulțimea A numerele:

a) naturale; b) întregi; c) raționale; d) iraționale.

Investigație

Este foarte important să vă cunoașteți grupa sangvină, pentru că puteți ajunge în situația de a salva sau de a fi salvat prin donație de sânge. În tabelul următor sunt descrise 4 grupe sangvine mari (O, A, B și AB), fiecare cu câte două subcategorii (– și +). Citindu-l și cunoscându-vă grupa sangvină, veți ști către ce tip de grupă sangvină puteți dona sau de la ce grupă sangvină puteți primi sânge.

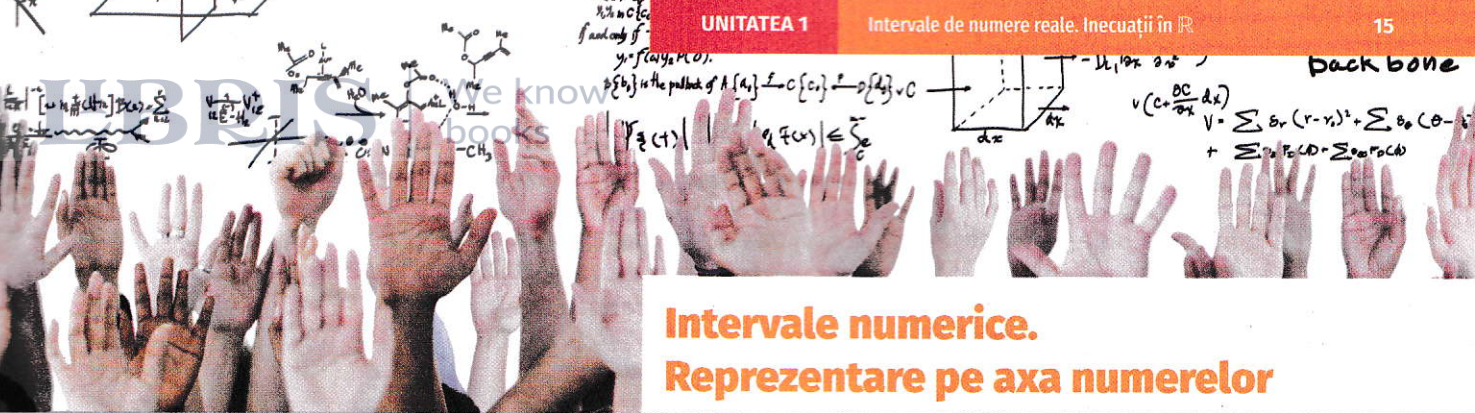
Întrebați-vă părinții ce grupă sangvină au și identificați-o pe a voastră folosind regulile de mai jos, în care termenii fiecărei sume sunt grupele sangvine ale părinților, iar rezultatele sunt grupele sangvine ale copiilor:

$A + A = A$; $A + O = A$; $A + B = AB$;

$B + B = B$; $B + O = B$; $O + O = O$.

Faceți legătura cu noțiunea de mulțime. Realizați un tabel cu grupele sangvine și numele colegilor din clasă. Veți forma astfel mulțimi distincte de elevi aparținând diferitelor grupe sangvine.

Grupa de sânge	Poate dona la...	Poate primi de la...
O-	O- O+ A- A+ B- B+ AB- AB+	O-
O+	O+ A+ B+ AB+	O- O+
A-	A- A+ AB- AB+	O- A-
A+	A+ AB+ AB+	O- O+ A- A+
B-	B- B+ AB- AB+	O- B-
B+	B+ AB+ AB+	O- O+ B- B+
AB-	AB- AB+ AB+	O- A- B- AB-
AB+	AB+ AB+ AB+	O- O+ A- A+ B- B+ AB- AB+



Intervale numerice. Reprezentare pe axa numerelor

În vorbirea curentă sunt multe situații în care folosim noțiunea de interval, cel mai des fiind corelată cu timpul: *Vremea va rămâne senină pe întreg intervalul următor de 24 de ore.*



Ne amintim!

Se numește **axa numerelor** ansamblul format din: o dreaptă numită direcție, un punct pe dreaptă (notat cu O) numit origine, un sens (spre dreapta), o unitate de măsură.

Oricărui număr real îi corespunde pe axa numerelor un punct (poziție) și reciproc. Astfel, o reprezentare a unei mulțimi de numere poate fi realizată prin corespondență cu mulțimi de puncte ale axei (privită ca dreaptă).

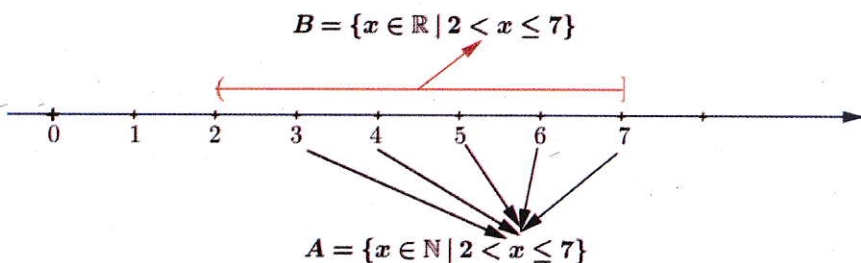
Pe dreaptă putem identifica trei categorii de părți ale sale: puncte, segmente, semidrepte.



Descoperiți!

Notăm cu A mulțimea tuturor numerelor naturale care au proprietatea că sunt mai mari decât 2 și mai mici sau egale cu 7. În aceste condiții, $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$, unde am folosit scrierea prin enumerarea elementelor care îndeplinesc condițiile date, sau $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 7\}$, unde am folosit scrierea cu ajutorul proprietăților elementelor mulțimii.

Există o diferență majoră între mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 7\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\}$. Dacă în primul caz se poate scrie mulțimea prin enumerarea elementelor, în al doilea caz nu este posibil, între oricare două numere naturale distincte situându-se o infinitate de numere reale:



O mulțime de tipul B o vom numi *interval numeric* sau, simplu, *interval*. Vom folosi o scriere simplificată a proprietăților elementelor ce o formează: $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\} = (2; 7]$.



Acum știm, deci putem rezolva!

- Pe dreapta d se consideră punctele distincte A, B și C , în această ordine. Construiți desenul corespunzător și evidențiați pe dreaptă segmentul AB și semidreapta (CA) .
- Se consideră segmentul de dreaptă MN , cu $M \neq N$. Descrieți segmentul cu ajutorul mulțimilor definite printr-o proprietate a elementelor ce le formează.
- Se consideră dreapta d și punctele distincte A, B și C . Realizați desenul, știind că semidreapta (AB) este conținută în semidreapta (CA) . Descrieți semidreapta (AB) cu ajutorul mulțimilor definite printr-o proprietate a elementelor ce le formează.



Reflectăm!

Descrierea notației folosite: $(2; 7]$.

➤ Numerele 2 și 7 se numesc capetele intervalului.

Capetele intervalului sunt acele numere între care se situează toate elementele acestuia, $2 < x \leq 7$.

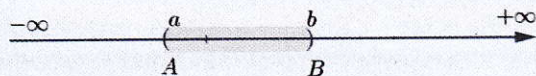
➤ Folosim paranteza rotundă asociată unui capăt de interval și înțelegem că valoarea de capăt nu aparține intervalului ($2 < x$).

➤ Folosim paranteza pătrată asociată unui capăt de interval și înțelegem că valoarea de capăt aparține intervalului ($x \leq 7$).

Fie a și b numere reale, $a < b$.

Mulțimea tuturor numerelor reale mai mari decât a și mai mici decât b se numește **interval deschis** $(a; b)$.

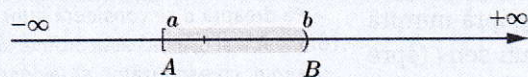
$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor din interiorul segmentului AB (fără capete).

Mulțimea tuturor numerelor reale mai mari sau egale cu a și mai mici decât b se numește **interval închis la stânga și deschis la dreapta** și se notează $[a; b)$.

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



Mulțimea tuturor numerelor reale mai mari sau egale cu a și mai mici sau egale decât b se numește **interval închis** $[a; b]$.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor situate pe segmentul AB (inclusiv capetele).

Mulțimea tuturor numerelor reale mai mari decât a și mai mici sau egale cu b se numește **interval deschis la stânga și închis la dreapta** și se notează $(a; b]$.

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



Reflectăm!

➤ Intervalele definite mai sus sunt *mărginite* (capetele intervalelor sunt exprimate prin numere reale).

➤ Intervalele sunt mulțimi de numere reale, de regulă formate dintr-o infinitate de numere.

➤ Intervalele au câte două capete; acestea pot fi deschise (capătul este însoțit de o paranteză rotundă) sau închise (capătul este însoțit de o paranteză dreaptă).

➤ Capătul deschis semnifică faptul că valoarea de capăt nu este element al intervalului (privit ca mulțime de numere), iar capătul închis semnifică faptul că valoarea de capăt este element al intervalului.

➤ Capătul deschis semnifică o inegalitate strictă ($<$, $>$), iar capătul închis semnifică o inegalitate nestrictă ($\leq$, $\geq$).

➤ Dacă $a = b$, atunci $(a; b) = (a; a) = \emptyset$ (niciun număr real nu poate fi în același timp mai mare și mai mic decât un număr dat) și $[a; b] = [a; a] = \{a\}$ (singurul număr care este în același timp mai mare sau egal și mai mic sau egal cu un număr dat este numărul însuși); nu au sens scrierile $(a; a]$ și $[a; a)$.

➤ O condiție de tipul $a \leq x \leq b$ (sau similară) implică un răspuns de tip interval numai în cazul rezolvării sale în mulțimea numerelor reale.



Exersăm împreună!

1. Scrieți intervalele următoare sub formă de mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor:

interval	sub formă de mulțime	interval	sub formă de mulțime
$[0; 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$	$(4; 10]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 10\}$
$[-2; 7)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 7\}$	$(-0, 1; 0, 1)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -0,1 < x < 0,1\}$
$[2; 1)$	nu este o scriere pentru un interval pentru că $2 > 1$		
$(\sqrt{2}; \sqrt{8} - 1)$	Verificăm mai întâi dacă $\sqrt{2} < \sqrt{8} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2}$ adevărat, $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < \sqrt{8} - 1\}$		

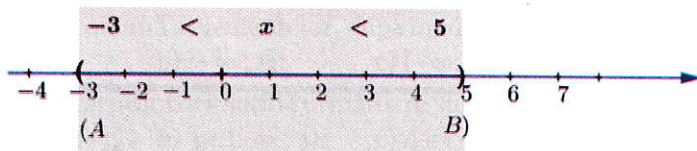
2. Scrieți sub formă de interval mulțimile următoare și precizați capetele:

mulțime	sub formă de interval
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	$[-3; 2)$, capetele sunt -3 și 2
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$	$[-2; 3]$, capetele sunt -2 și 3
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$	$(2; 3)$, capetele sunt 2 și 3
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$	$(-2; 2]$, capetele sunt -2 și 2

3. Precizați care dintre relațiile următoare sunt adevărate și justificați:

	A/F	justificare
a) $3 \in (-8; 12]$	A	trebuie verificat dacă $-8 < 3 \leq 12$ și se verifică
b) $4 \in (4; 7]$	F	interval deschis în 4, deci $4 < 4$ fals
c) $2\sqrt{3} \in [3; 4]$	A	$3 \leq 2\sqrt{3} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{9} \leq \sqrt{12} \leq \sqrt{16}$ adevărat

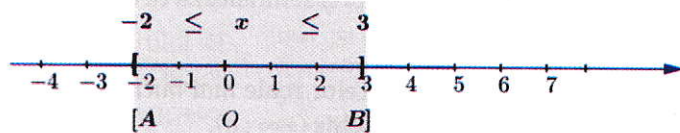
Desenăm pe axa numerelor reale punctele $A(-3)$ și $B(5)$.



Observăm faptul că orice număr real x cu proprietatea $-3 < x < 5$ se va reprezenta pe axă printr-un punct situat între A și B și putem afirma că oricărui punct dintre A și B îi va corespunde un număr real cuprins între -3 și 5 . Cum condiția anterioară este chiar descrierea intervalului $(-3; 5)$, putem spune că reprezentării intervalului $(-3; 5)$ pe axă îi corespunde segmentul AB , deschis la ambele capete, pe care-l vom nota (AB) .

Exersăm împreună!

1. Scrieți intervalul care corespunde segmentului $[AB]$ din desenul alăturat. Verificați dacă $O \in [AB]$. Scrieți trei numere întregi și trei numere raționale neîntregi din intervalul $[-2; 3]$.



Rezolvare. Punctul O se găsește pe axă între

punctele A și B . Exemple de numere întregi: $-1; 1; 2$; exemple de numere raționale neîntregi $0,5; 1,5; 2,5$.

2. Reprezentați intervalele numerice pe axa numerelor, în fiecare caz în parte: a) $(-3; 1]$; b) $[\frac{1}{2}; 1, 5)$; c) $[\sqrt{2}; \sqrt{8}]$ (construiți, fie utilizând o modalitate de a reprezenta segmente de lungimi numere iraționale date, fie utilizând aproximări ale acestor numere).

3. Scrieți intervalele corespunzătoare segmentelor despre care se cunosc:

- a) $[AB]$, cu $A(-3)$ și $B(2)$; b) (CD) , cu $C(0)$ și $D(3)$; c) $[EF]$, cu $E(-1)$ și $F(10)$; d) (GH) , cu $G(-5)$ și $H(-2)$; e) $[MN]$, cu un capăt de abscisă 0 și $MN = 4$ (cu identificarea ambelor cazuri); f) $[PQ]$, cu mijlocul segmentului de abscisă 0 și $PQ = 10$.

Rezolvare. a) $[-3; 2]$; b) $(0; 3)$; c) $[-1; 10]$; d) $(-5; -2]$; e) $[0; 4]$ sau $[-4; 0]$; f) $[-5; 5]$.

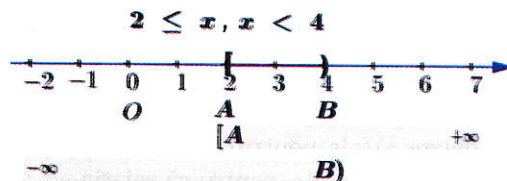
4. Dați exemplu de: a) interval deschis la stânga și închis la dreapta; b) interval închis; c) interval închis la stânga și deschis la dreapta; d) interval deschis; e) interval închis care-l conține pe 0 ; f) interval deschis care-l conține pe 0 ; g) interval deschis la stânga și închis la dreapta, care-l conține pe 0 și acesta este și capăt.

5. Dacă veți verifica pe anumite ambalaje, de exemplu ale unor produse alimentare, înscrierea gramajului este de tipul $100\text{ g} \pm 2\text{ g}$. Interpretați cu ajutorul intervalelor această informație.

Descoperiți!

■ Cum reprezentăm pe axa numerelor mulțimea punctelor care au ca abscise valori din mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$, adică toate punctele axei aflate la dreapta punctului $A(2)$?

■ Cum reprezentăm pe axa numerelor mulțimea punctelor care au ca abscise valori din mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$, adică toate punctele axei aflate la stânga punctului $B(4)$?



Atenție!

Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 4\} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ este diferită de mulțimea $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\} = [-3; 4]$. Mulțimea A este finită, deoarece conține doar numerele întregi cuprinse între -3 și 4 , iar mulțimea B este infinită (un interval). Mulțimile sunt diferite, $A \neq B$.



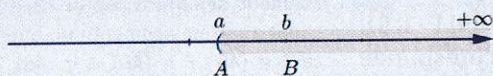
$-\infty$ (minus infinit) și $+\infty$ (plus infinit) sunt simboluri care ne permit definirea unui nou tip de intervale, cu unul dintre capete infinit; $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

Definiție

Fie a un număr real.

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mari* decât a determină **intervalul deschis** $(a; +\infty)$.

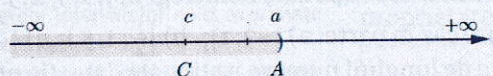
$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor de pe semidreapta $(AB$, unde A este capătul de abscisă a și B punct de abscisă mai mare ca a ; paranteza rotundă asociată originii semidreptei semnalează că originea nu aparține acesteia.

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mici* decât a determină **intervalul deschis** $(-\infty; a)$.

$$(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor de pe semidreapta $(AC$, unde A este capătul de abscisă a și C punct de abscisă mai mică decât a .

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mari sau egale* cu a determină **intervalul închis la stânga** $[a; +\infty)$.

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor de pe semidreapta $[AB$, unde A este capătul de abscisă a și B punct de abscisă mai mare ca a ; paranteza dreaptă asociată originii semidreptei semnalează că originea aparține acesteia.

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mici sau egale* cu a determină **intervalul închis la dreapta** $(-\infty; a]$.

$$(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor de pe semidreapta $[AC$, unde A este capătul de abscisă a și C punct de abscisă mai mică decât a .

Observații

■ Intervalele pot avea ambele capete finite (exprimate prin numere reale), caz în care reprezentarea pe axă corespunde unui segment de dreaptă sau unui punct, sau pot avea un capăt finit și unul infinit, caz în care reprezentarea corespunde unei semidrepte.

■ Intervalele cu un capăt infinit nu pot fi decât deschise la capătul infinit.

■ Pentru intervalele de tipul $(a; +\infty)$ și $(-\infty; a)$, semidreptele corespunzătoare sunt deschise (nu conțin originea semidreptei). Pentru intervalele de tipul $[a; +\infty)$ și $(-\infty; a]$, semidreptele corespunzătoare sunt închise la capătul finit (conțin originea semidreptei).

■ O condiție de tipul $x < a$ (sau similară) implică un răspuns de tip interval numai în cazul rezolvării sale în mulțimea numerelor reale.



Exemple

➤ Dacă $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$, atunci relația $A = B$ este adevărată, ambele mulțimi fiind formate din exact aceleași elemente. Spunem că mulțimile sunt egale.



Exersăm împreună!

1. Precizați care dintre scrierile următoare reprezintă un interval:

a) $(+\infty; 2)$; b) $[2; +\infty)$; c) $[-3; +\infty]$; d) $(-\infty; -4]$; e) $(0; +\infty)$.

Rezolvare: a) fals, pentru că relația $+\infty < x < 2$ este falsă. Corect este $(2; +\infty)$;

b) adevărat; c) fals, pentru că relația $-3 \leq x \leq +\infty$ este falsă. Corect este $[-3; +\infty)$; d) adevărat; e) adevărat.

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile următoare:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

Rezolvare: a) $[-3; +\infty)$; b) $(-\infty; -5]$; c) $(2; +\infty)$; d) $(-\infty; 0)$.

3. Scrieți intervalele următoare sub formă de mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor, după model: $[0; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

a) $[-2; +\infty)$; b) $(-\infty; 1]$; c) $(-\infty; 6)$; d) $(5; +\infty)$.

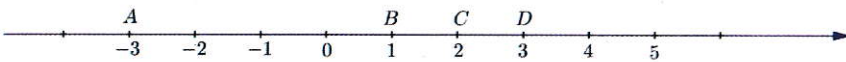
4. Precizați care dintre relațiile următoare sunt adevărate:

a) $3 \in (-1; +\infty)$; b) $3 \in (-\infty; 3)$; c) $4 \in (-3; 4]$; d) $-1 \in (-\infty; 2)$.

Rezolvare: a, f, a, a.

Observații

Desenăm pe axa numerelor punctele $A(-3)$, $B(1)$, $C(2)$, $D(3)$.



Cum intervalele reprezintă mulțimi, rezultă că relațiile de incluziune și de egalitate între intervale au aceeași semnificație ca cele de la mulțimi, descrise anterior.

Observăm că segmentul BC se găsește în interiorul segmentului AD . Putem scrie acest lucru cu ajutorul intervalelor $[1; 2] \subset [-3; 3]$. Mai putem spune și că: $(1; 2) \subset [-3; 3]$, $[1; 2] \subset (-3; 3)$, $(1; 3) \subset (1; 3)$, $(-3; 3) \subset (-3; +\infty)$. Incluziunea $[-3; 3) \subset (-3; +\infty)$ este falsă, pentru că numărul -3 se găsește în primul interval și nu se găsește în al doilea interval.

Precizați care dintre relațiile următoare sunt adevărate: $(-\infty; 1) \subset (-\infty; 2)$; $(-3; 1) \subset (-\infty; 3)$; $[-3; 3] \subset (1; 3)$; $[-3; 2) \subset (-\infty; 2)$; $(1; 2] \subset (-\infty; 2)$; $(1; +\infty) \subset (-3; +\infty)$.

Reflectăm!

➤ Spre exemplificare, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, în condițiile în care $a < b$ și $c < d$, atunci $[a; b) = [c; d)$ dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$. În consecință, $[a; b) \neq [c; d)$ dacă $a \neq c$ sau $b \neq d$.

➤ În condițiile anterioare, dacă $[a; b) \subset [c; d)$, atunci $c \leq a < b < d$ sau $c < a < b \leq d$ (incluziune strictă).

➤ Orice două intervale care nu sunt de același tip (din punct de vedere al capetelor – închise/deschise) sunt diferite.

Exemplu: $[a; b) \neq (c; d)$, oricare ar fi a, b, c, d numere reale, $a < b, c < d$.

Exersăm împreună!

1. Dați exemplu de interval în fiecare dintre cazurile: a) interval închis la ambele capete; b) interval deschis la stânga și închis la dreapta; c) două intervale diferite; d) două intervale într-o relație de incluziune.

2. Determinați numerele reale a și b astfel încât:

a) $(2; a) = (b; 5)$; b) $(2; a) \subset (b; 5)$; c) $(b; 5) \subset (2; a)$;

d) $(2; a) \subset [b; 5]$; e) $[2; a] \subset (b; 5)$.

Rezolvare: a) $a = 5, b = 2$; b) $2 < a \leq 5, b \leq 2$. Discutați la nivelul clasei celelalte cerințe.



Exemple

➤ Dacă $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ și $C = \{0; 1\}$, atunci relația $C \subset A$ este adevărată, toate elementele mulțimii C fiind și elemente ale mulțimii A . Spunem că mulțimea C este inclusă în mulțimea A ; mai mult, C reprezintă o submulțime a mulțimii A .



Activitate pe grupe

Decupați din carton 52 de dreptunghiuri de dimensiunea unei cărți de joc. Pe 20 dintre ele se vor scrie numere reale (diferite), pe câte 4 dintre ele simbolurile $+\infty$, respectiv $-\infty$. Restul de 24 de dreptunghiuri se vor împărți câte 6, pe fiecare set se va trece câte unul dintre simbolurile de capăt de interval: $(,), [,]$, respectiv $], [$. Se vor pregăti astfel atâtea seturi a câte 52 de cărți câte grupe de câte 4 se pot forma cu elevii (+/- 1 elev pe grupă).

În grupe de câte 4 elevi, se alege drept carte de început una care să conțină unul dintre semnele $($ sau $]$ și se așază cu fața în sus pe tabla mesei, între elevi. Se vor amesteca cărțile rămase și apoi se vor împărți, fiecare jucător primind câte 4 cărți. Se decide jucătorul care începe jocul și acesta va pune o carte care se potrivește la dreapta cărții de început, în cazul acesta un număr. Următorul jucător trebuie să pună obligatoriu un număr sau un simbol de tip infinit, dar cu condiția de a da sens unei scrieri de tip interval. Următorul jucător poate pune doar un capăt care să finalizeze scrierea de tip interval. Următorul trebuie să pună pe un nou rând un capăt de interval ș.a.m.d. În cazul în care, atunci când este la rând, jucătorul nu are nicio carte care se potrivește, este obligat să tragă de jos carte. Dacă nu mai sunt cărți de tras, jucătorul care nu are o carte convenabilă va zice *pas*. Jocul se finalizează fie când un jucător reușește să pună jos toate cărțile din mână – caz în care este și câștigător, fie când toți cei 4 jucători spun consecutiv *pas* și nu mai sunt cărți de ales, ceea ce înseamnă că jocul s-a blocat și va fi declarat învingător jucătorul cu cele mai puține cărți în mână.